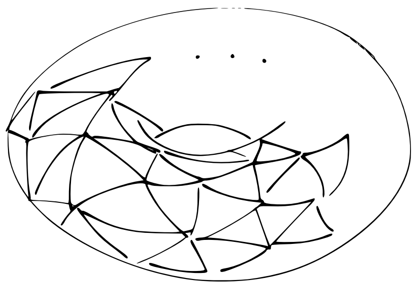
Seminar: Simpliziale Topologie

C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de) Juli 2015

Viele topologische Objekte besitzen einfache kombinatorische Beschreibungen. Zum Beispiel können viele Räume konstruiert werden, indem man induktiv Simplizes, also Punkte, Strecken, Dreiecke, Tetraeder, ... verklebt. Einerseits kann man dann topologische Invarianten durch kombinatorische/simpliziale Methoden definieren, beschreiben und berechnen. Andererseits sind aber simpliziale Strukturen so fundamental, dass sie sich auch in viele andere mathematische Gebiete übertragen lassen.



In diesem Seminar werden wir simpliziale Strukturen in der Topologie studieren und simpliziale Begriffe und Techniken auf andere Gebiete übertragen. Insbesondere werden wir die folgenden Themen behandeln:

- Simpliziale Komplexe
- Simpliziale Homologie
- Klassifikation kompakter Flächen
- Simpliziale Mengen
- Anwendungen simplizialer Methoden in theoretischer und praktischer Mathematik.

Falls Sie daran interessiert sind, im Zusammenhang mit diesem Seminar eine Abschlussarbeit zu schreiben, geben Sie bitte möglichst bald Bescheid.

Themen

Simpliziale Komplexe

Vortrag 1 (Simpliziale Komplexe)**.** Geometrische simpliziale Komplexe; Triangulierungen; abstrakte simpliziale Komplexe; Beispiele simplizialer Komplexe.
Literatur: [11, § 1–3]

Vortrag 2 (Simpliziale Approximation)**.** Simpliziale Abbildungen; Beispiele; baryzentrische Unterteilung; der simpliziale Approximationssatz (mit Beweis); Beispiele.
Literatur: [11, §14–16]

Simpliziale Homologie

Vortrag 3 (Simpliziale Homologie)**.** Definition simplizialer Homologie (mit $\mathbf{Z}$- und mit $\mathbf{Z}/2$-Koeffizienten); Funktorialität; einfache Beispiele (z.B. Torus, Kleinsche Flasche).
Literatur: [11, § 5, § 12]

Vortrag 4 (Homotopie-Invarianz simplizialer Homologie)**.** Wiederholung von Homotopie von Abbildungen; Homotopie-Invarianz simplizialer Homologie (mit Beweis); Definition der Euler-Charakteristik; Beispiele; Homotopie-Invarianz der Euler-Charakteristik.
Literatur: [11, §17–19]

Vortrag 5 (Algorithmische simpliziale Homologie)**.** Smith-Normalform (über den ganzen Zahlen); algorithmische Berechnung der Homologie von Kettenkomplexen endlich erzeugter abelscher Gruppen; Anwendung auf simpliziale Homologie.
Literatur: [5, Kapitel 3] (das Buch verwendet als geometrisches Modell kubische und nicht simpliziale Homologie; es lässt sich aber alles leicht auf den simplizialen Fall übertragen); [11, § 11]

Vortrag 6 (Anwendung: Persistente Homologie)**.** Simpliziale Komplexe aus Punktmengen (Čech-/Rips-Komplexe); persistente Homologie; Berechnung und Anwendung von persistenter Homologie.
Literatur: [4, 3]

Kompakte Flächen

Vortrag 7 (Flächen und ihre Triangulierbarkeit)**.** Flächen als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten; Beispiele; Beweis der Triangulierbarkeit von kompakten Flächen (der Satz von Jordan-Schönflies sollte erklärt werden, muss aber nicht bewiesen werden).
Literatur: [10, Kapitel 2.2, 3.1] [8, § 2–4]

Vortrag 8 (Klassifikation kompakter Flächen)**.** Normalformen kompakter Flächen ohne Rand (mit Beweis); Eindeutigkeit mithilfe von simplizialer Homologie/Euler-Charakteristik.
Literatur: [8, § 5,7,8]

Vortrag 9 (Anwendung: Stereolithographie)**.** Wie funktioniert Stereolithographie? Beschreibung des STL-Formats; welche mathematischen Eigenschaften sind vor dem Druck eines in STL beschriebenen Objekts zu überprüfen? Wie kann das algorithmisch umgesetzt werden?
Literatur: [2, Kapitel 6.1–6.4]

Simpliziale Mengen

Vortrag 10 (Simpliziale Mengen)**.** Simpliziale Mengen; Vergleich mit simplizialen Komplexen; der totale singuläre Komplex; simpliziale Objekte in Kategorien; simpliziale Abbildungen; zwei Charakterisierungen von Homotopie simplizialer Abbildungen; assoziierter Kettenkomplex.
Literatur: [15, Kapitel 8.1] [9, S. 1–16]

Vortrag 11 (Geometrische Realisierung simplizialer Mengen)**.** Geometrische Realisierung simplizialer Mengen; Beispiele; Vergleich mit der geometrischen Realisierung simplizialer Komplexe; adjungierte Funktoren; Eigenschaften und Beispiele adjungierter Funktoren.
Literatur: [9, S. 55–62], alle Bücher über Kategorientheorie, z.B. [7]

Vortrag 12 (Die Dold-Kan-Korrespondenz)**.** Homotopiegruppen von simplizialen Mengen; der normalisierte Kettenkomplex; kurze Wiederholung abelscher Kategorien; die Dold-Kan-Korrespondenz (mit Beweis).
Literatur: [15, Kapitel 8.3, Kapitel 8.4]

Vortrag 13 (Anwendung: Klassifizierende Räume)**.** Nerven von Kategorien; klassifizierende Räume von Gruppen über simpliziale Mengen; kurzer Überblick über den Zusammenhang mit der Bar-Auflösung und Gruppen(ko)homologie; kurzer Überblick über den Zusammenhang mit der Klassifikation von Bündeln; simpliziale Eilenberg-Mac-Lane-Räume über die Dold-Kan-Korrespondenz.
Literatur: [15, Beispiel 8.1.7, 8.3.3, Definition 8.3, Beispiel 8.4.4, Kapitel 8.6]

Vortrag 14 (Anwendung: ∞-Kategorien)**.** Kurze Einführung in die Begriffe und Anwendungen von ∞-Kategorien; Zusammenhang mit simplizialen Mengen.
Literatur: [6]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

  http://books.google.com
  http://www.ams.org/mathscinet
  http://www.springerlink.com

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.

- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.

- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [12]; dafür werden auch LaTeX-Vorlagen zur Verfügung gestellt:
  http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/topsem_ws1516/

- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung eigenständig zu formulieren und alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.

- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.

- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.

- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

- Sprechen Sie laut und deutlich.

- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

[1] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.

[2] C.K. Chua, K.F. Leong, C.S. Lim. *Rapid Prototyping: Principles and Applications*, World Scientific Publishing, 2010.

[3] H. Edelsbrunner, J.L. Harer. *Computational topology. An introduction*, American Mathematical Society, 2010.

[4] R. Ghrist. Barcodes: the persistent topology of data, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45, S. 61–75, 2008.

[5] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, Marian. *Computational homology*, Applied Mathematical Sciences, 157. Springer, 2004.

[6] J. Lurie. *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, 170, Princeton University Press, 2009.

[7] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998.

[8] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, 56, Springer, 1989.

[9] J.P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1993.

[10] B. Mohar,C. Thomassen. *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, 2001.

[11] J.R. Munkres. *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[12] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

Eines der Standardwerke zur Benutzung von LaTeX; weitere Unterstützung finden Sie unter http://www.ctan.org/starter.html

[13] J.J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*, vierte Auflage, Band 148 der *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1999.

[14] T. Tantau. *The* TikZ *and* PGF *Packages*,
http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf

Dokumentation des TikZ-Pakets für LaTeX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in LaTeX zu erstellen.

[15] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38, Cambridge University Press, 1994.