Klausur zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser 27. Juli 2016

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	7	9	6	10	6	6	6	50
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (2+2+3 = 7 Punkte)**.** Die Sprache von *Schnitt-Geometrie* enthält *Geraden* und die Beziehung *„schneiden sich“* zwischen Geraden und Geraden sowie die Sprache der Logik erster Stufe. Schnitt-Geometrie erfüllt die folgenden Axiome:

S 1 Sind g und h Geraden und schneiden sich g und h, so schneiden sich auch h und g.

Ein *Modell für Schnitt-Geometrie* ist ein Paar $(G, \sqcap)$, wobei G eine Menge und „$\sqcap$“$\subset G \times G$ eine Relation auf G mit

$$\forall_{g,h \in G} \quad g \sqcap h \Longrightarrow h \sqcap g$$

ist. Wir fassen dabei die Elemente von G als Geraden auf und die Relation „$\sqcap$“ als „schneiden sich“. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

1. Geben Sie eine vernünftige Definition für *Morphismen von Schnitt-Geometrien.*

2. Geben Sie eine vernünftige Definition für *Isomorphismen von Schnitt-Geometrien.*

3. Sind die folgenden beiden Modelle für Schnitt-Geometrie isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\big(\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,1)\}\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \big(\{4,5,6,7\}, \{(4,5),(5,4)\}\big)$$

Aufgabe 2 ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bereits

   $$\forall_{t\in[0,1]} \quad \gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$$

   bezüglich des Standardskalarprodukts?

2. Gibt es eine Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$ mit

   $$\forall_{z\in H} \quad \operatorname{Im} f(z) < \operatorname{Im} z \ ?$$

3. Gilt für jede glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow H$ und jede Möbiustransformation $f\colon H \longrightarrow H$ bereits $L_{\mathbb{H}^2}(f\circ\gamma) = L_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$?

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto n^2 \end{aligned}$$

   eine quasi-isometrische Einbettung (bzgl. der Standardmetrik auf $\mathbb{Z}$)?

2. Seien (X, d), (X', d'), (X'', d'') metrische Räume, seien $f_1, f_2 \colon X \longrightarrow X'$ Abbildungen, die endlichen Abstand voneinander haben, und sei außerdem $g \colon (X', d') \longrightarrow (X'', d'')$ eine quasi-isometrische Einbettung. Haben dann auch $g \circ f_1$ und $g \circ f_2$ notwendigerweise endlichen Abstand voneinander?

Aufgabe 4 ($3 + 2 + 4 + 1 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz von Gauß-Bonnet für die hyperbolische Ebene.
2. Wie/unter welchen Voraussetzungen ist der hyperbolische Winkel zwischen glatten Kurven in der hyperbolischen Ebene definiert?
3. Skizzieren Sie kurz den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet (ein paar Sätze mit den wesentlichen Ideen/Schritten genügen) und illustrieren Sie diese Beweisskizze durch geeignete Zeichnungen.
4. Nennen Sie eine Anwendung/Folgerung des Satzes von Gauß-Bonnet.

Aufgabe 5 (4 + 2 = 6 Punkte)**.**

1. Sei (V, E) ein endlicher zusammenhängender planarer Graph und es gelte $|V| \geq 3$. Zeigen Sie, dass
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

2. Zeigen Sie, dass der Graph K_5 *nicht* planar ist.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zwei Spieler, A und B, spielen folgendes Spiel auf einem Oktaeder:

- Spieler A beginnt und setzt eine Spielfigur auf eine Ecke seiner Wahl des Oktaeders. Danach macht Spieler B den ersten normalen Zug.
- Ein Zug besteht darin, diese Figur auf eine Ecke zu setzen, die auf derselben Seitenfläche wie die aktuell besetzte Ecke liegt, und die in den vorigen Zügen noch *nicht* besucht wurde.
- Spieler A und B ziehen abwechselnd.
- Der Spieler, der den letzten Zug machen kann, gewinnt.

Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler B an und begründen Sie, warum es sich dabei um eine Gewinnstrategie handelt.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d_2)$ und es gebe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f^n(x) = x.$$

Zeigen Sie, dass die Punkte $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ auf einem gemeinsamen Kreis in $(\mathbb{R}^2, d_2)$ liegen.
Hinweis. Was hat der Punkt $x_0 := \sum_{k=0}^{n-1} 1/n \cdot f^k(x)$ damit zu tun?