Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 4 vom 6. Mai 2016

Aufgabe 1 (Geodäten)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ eine stetige Kurve mit $L(\gamma) = 1$, so ist γ eine Geodäte.
2. Sind $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow X$ Geodäten mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$, so ist auch

$$\begin{aligned}[0,2] &\longrightarrow X\\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [0,1]\\ \gamma_2(t-1) & \text{falls } t \in [1,2]\end{cases}\end{aligned}$$

eine Geodäte.

Aufgabe 2 (Maximumsmetrik)**.** Wir betrachten die Maximumsmetrik d_∞ auf der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

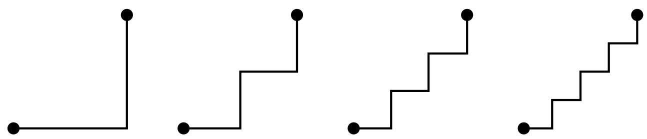
1. Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ eindeutig geodätisch?
2. Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_\infty)$ geodätisch?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 ($\sqrt{2} = 2$?!)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Erklären Sie genau, worin der Fehler besteht und welche Schritte korrekt sind.

Behauptung. Es gilt $\sqrt{2} = 2$.

Beweis. Wir betrachten die folgenden stetigen Kurven in $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\gamma_n\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Treppenkurve mit n Stufen mit Stufentiefe und Stufenhöhe $1/n$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$, mit der offensichtlichen gleichmäßigen Parametrisierung:



γ_1 γ_2 γ_3 γ_4

Dann konvergiert die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto 1/2 \cdot (t,t).\end{aligned}$$

Also ist

$$L(\gamma) = L\bigl(\lim_{n\to\infty} \gamma_n\bigr) = \lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) = 2.$$

Andererseits ist natürlich $L(\gamma) = \sqrt{2}$. Somit folgt $\sqrt{2} = 2$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (die unendliche Diedergruppe)**.** Wir betrachten auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ die Standardmetrik d_2 und definieren die *unendliche Diedergruppe* $D_\infty := \operatorname{Isom}(\mathbb{Z}, d_2)$.

1. Zeigen Sie, dass $\{s, t\}$ ein Erzeugendensystem von D_∞ ist, wobei

$$\begin{aligned} s \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x + 1, \\ t \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie $\operatorname{Cay}(D_\infty, \{s, t\})$.

2. Zeigen Sie, dass $\{t, t'\}$ ein Erzeugendensystem von D_∞ ist, wobei t wie oben definiert ist und

$$\begin{aligned} t' \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto 1 - x. \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie $\operatorname{Cay}(D_\infty, \{t, t'\})$.

Bonusaufgabe (geodätische Strahlen in Gruppen)**.** Sei G eine unendliche Gruppe, die ein endliches Erzeugendensystem S besitzt. Zeigen Sie, dass es dann eine isometrische Einbettung $\mathbb{N} \longrightarrow G$ gibt, wobei wir G mit der Wortmetrik $d_{G,S}$ bezüglich S und $\mathbb{N}$ mit der Standardmetrik versehen.
Hinweis. Als erstes könnte man sich überlegen, warum man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geodätische Einbettung $\{0, \dots, n\} \longrightarrow G$ finden kann. Warum hilft das? Warum ist es so wichtig, dass S endlich ist?

Abgabe bis zum 13. Mai 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen