Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 11 vom 24. Juni 2016

Aufgabe 1 (Möbiustransformationen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A(i/2) = i$ und $f_A(i) = 2 \cdot i$.
2. Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $f_A = (z \mapsto -\overline{z})$.

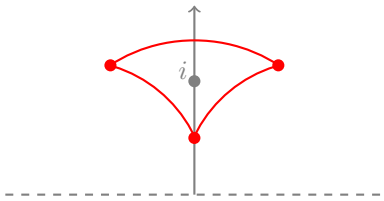
Aufgabe 2 (Stabilisator von i)**.** Zeigen Sie $\mathrm{Stab}_i = \mathrm{SO}(2)$.

Aufgabe 3 (ein hyperbolisches Dreieck)**.** Zeichnen Sie das geodätische Dreieck in (H, d_H) mit den Ecken $1 + i$, $i - 1$, $2 + 2 \cdot i$. Erklären Sie dabei genau, warum Ihre Zeichnung korrekt ist und wie Sie die entscheidenden Komponenten berechnet/konstruiert haben.

Aufgabe 4 (reguläre hyperbolische Dreiecke)**.** Sei $f\colon H \longrightarrow H$ die Möbiustransformation zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Zu $y \in (0,1)$ betrachten wir die Punkte $z_0(y) := i \cdot y$ sowie $z_1(y) := f(i \cdot y)$ und $z_2(y) := f^2(i \cdot y)$.



Seien $\alpha_0(y)$, $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ die entsprechenden Winkel des von $z_0(y), z_1(y), z_2(y)$ aufgespannten geodätischen Dreiecks in (H, d_H).

1. Zeigen Sie, dass $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_H$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $d_H(z_0(y), z_1(y)) = d_H(z_1(y), z_2(y)) = d_H(z_2(y), z_0(y))$.
3. Zeigen Sie, dass $\alpha_0(y) = \alpha_1(y) = \alpha_2(y) > 0$.
4. Skizzieren Sie einen Beweis für $\lim_{y \to 0} \alpha_0(y) = 0$.

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie die wesentlichen Schritte formulieren und mit geeigneten Skizzen illustrieren; Sie müssen die zugehörigen Berechnungen nicht im Detail ausführen.

Bonusaufgabe (hyperbolische Hosen)**.** Wie kann man hyperbolische Hosen (hyperbolic baby pants) stricken? Was hat das mit hyperbolischer Geometrie zu tun?

Hinweis. S.-M. Belcastro, C. Yackel. *Making Mathematics with Needlework: Ten Papers and Ten Projects*, A.K. Peters, 2007.

Abgabe bis zum 1. Juli 2016, 12:30 Uhr, in die Briefkästen