Übungen zur Geometrie

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 15. April 2016

Aufgabe 1 (Unabhängigkeit)**.** Ein *Viereck* in Mini-Geometrie ist ein Quadrupel (u, v, w, x) von Punkten, wobei die Punkte u, v, die Punkte v, w, die Punkte w, x und die Punkte x, u je auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ein Viereck ist *nicht-entartet*, wenn alle vier Eckpunkte verschieden sind. Welche der folgenden Sätze in Mini-Geometrie sind unabhängig von den Mini-Geometrie-Axiomen? Begründen Sie Ihre Antwort!

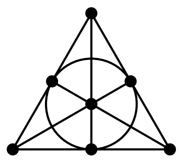
1. Sind (u, v, w) und (u, w, z) Dreiecke in Mini-Geometrie, so ist (u, v, w, z) ein Viereck in Mini-Geometrie.
2. Ist (u, v, w, x) ein nicht-entartetes Viereck in Mini-Geometrie, so ist die eindeutige Gerade durch u und v parallel zu der eindeutigen Gerade, auf der die Punkte w und x liegen.

Aufgabe 2 (Modelle über $\mathbb{F}_2$)**.**

1. Zeichnen Sie $A(\mathbb{F}_2)$ und $A(\mathbb{F}_2^3)$ und erklären Sie Ihre Bilder.
2. Sei (V, E) ein Graph mit $V \neq \emptyset$. Gibt es dann einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V mit $A(V) \cong_{\mathsf{MG}} (V, E, \in)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Die Fano-Ebene)**.**

1. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $P(K)$ tatsächlich ein Modell für Mini-Geometrie ist.
2. Sei K ein endlicher Körper. Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte und Geraden in der Mini-Geometrie $P(K)$.
3. Wie kann man untenstehendes Bild als Skizze von $P(\mathbb{F}_2)$ verstehen? Beschriften Sie insbesondere alle Punkte und Geraden geeignet!



Aufgabe 4 (Übungsaufgaben)**.** Eine Gruppe von 17 Studenten bearbeitet drei Übungsaufgaben. Je zwei Studenten diskutieren eine dieser drei Aufgaben. Zeigen Sie, dass es dann drei Studenten und eine Aufgabe A gibt, so dass je zwei dieser drei Studenten über A diskutiert haben.
Hinweis. Verwenden Sie ein geeignetes Schubfachargument und Mini-Ramsey.

Bonusaufgabe (Isomorphie linearer Mini-Geometrien)**.** Sei K ein Körper und seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $A(K^n) \cong_{\mathsf{MG}} A(K^m)$. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ gilt.

Abgabe bis zum 22. April 2016, 12:00 Uhr, in die Briefkästen