SEMINAR: STABLE COHOMOLOGY OF ARITHMETIC GROUPS

BUNKE/KINGS/LÖH/SAUER

Zusammenfassung. Ziel des Seminars ist es, Borels Arbeit über die stabile Kohomologie von arithmetischen Gruppen und ihre Anwendungen auf K-Theorie von Zahlringen zu verstehen. Als stabile Kohomologie arithmetischer Gruppen bezeichnet man dabei die Betrachtung von Kohomologieringen $H^*(\Gamma_n)$ für $n \to \infty$, wobei $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geeignete Folge arithmetischer Gruppen ist; zum Beispiel erhält man für jeden Zahlkörper K eine solche Folge via $\Gamma_n = \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_K)$.

(1) Strukturtheorie reeller halbeinfacher Liegruppen am Beispiel von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Erkläre die Cartan- und Bruhat-Zerlegungen [5, Ch. VI], [7, Ch. 2]. Behandele dann die Kohomologie symmetrischer Räume: Erkläre kompakte und nicht-kompakte Formen symmetrischer Räume besonders für die Gruppen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Zeige, daß die Kohomologie kompakter symmetrischer Räume durch invariante Formen berechnet wird. Zeige, daß invariante Formen harmonisch sind [4, Ch. 5], [5, Ch. IV, Exercises and further results B].
(2) Der Satz von Matsushima [6]: Zeige, daß die Kohomologie eines kompakten lokalsymmetrischen Raumes in kleinen Graden durch invariante Formen dargestellt wird.
(3) Harmonische Formen: Zeige für einen lokalsymmetrischen Raum endlichen Volumens (und für allgemeinere vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten), daß die Abbildung von gewissen L^2-harmonischen Formen in die Kohomologie (in kleinen Graden) injektiv ist. Schließe daraus, daß die Abbildung von invarianten Formen in die Kohomologie in kleinen Graden injektiv ist [1, Prop. 2.5, 3.6].
(4) Der Satz von Garland [1, Thm. 3.5]: Zeige für einen lokalsymmetrischen Raum endlichen Volumens, daß die Abbildung von invarianten p-Formen in die Kohomologie surjektiv ist, falls im Grad p alle Klassen durch quadratisch integrierbare Formen repräsentiert werden können.
(5) Strukturtheorie algebraischer $\mathbb{Q}$-Gruppen: Was ist der $\mathbb{Q}$-Rang? Beispiele von arithmetischen Gittern in halbeinfachen Liegruppen [9, Ch. 5].
(6) Beschreibe die Borel-Serre-Kompaktifizierung als Mannigfaltigkeit mit Rand [3, Sec. 6].
(7) Riemannsche Geometrie der Borel-Serre Kompaktifizierung im Unendlichen: Differentialformen auf Siegelgebieten, logarithmisches Wachstum, quadratische Integrierbarkeit [1, Sec. 4–7].

Date: WS 2011/2012.

(8) Konstruiere einen Komplex feiner Garben auf der Borel-Serre-Kompaktifizierung, welcher die konstante Garbe auflöst, und dessen globale Schnitte in kleinen Graden quadratisch integrierbar sind [1, Sec. 6–7.]. Schließe daraus, daß die Abbildung von invarianten Formen auf die Kohomologie in kleinen Graden bijektiv ist.

(9) Stabile Kohomologie von arithmetischen Gruppen: Berechne die stabile Kohomologie von $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_K)$ für Zahlkörper K als Ring [1, Sec. 11–12].

(10) Quillen K-Theorie: Erkläre die Definition höherer K-Theorie von Ringen durch Quillens $+$-Konstruktion [8, Ch. IV]. Gib einen Überblick über ganzzahlige Ergebnisse zu K_0 und K_1 von Zahlringen.

(11) Die rationale K-Theorie von Zahlringen: Erkläre die Struktur der rationalen Kohomologie von h-Räumen als freie gr-kommutative Algebra über den primitiven Elementen und den Zusammenhang mit der rationalen Homotopie [4]. Bestimme die primitiven Elemente in der Kohomologie arithmetischer Gruppen und schließe den Hauptsatz von Borel über die Berechnung von $K_i(\mathcal{O}_K) \otimes \mathbb{Q}$ für $i \geq 2$.

(12) Regulatoren: Konstruiere via Liealgebrakohomologie explizite Erzeuger der reellen Kohomologie des K-Theoriespektrums und damit die Borelregulatorabbildung [4]. Erkläre den Zusammenhang mit der Chern-Weyl-Theorie. Für einen Zahlring R gibt es auf $K_*(R) \otimes \mathbb{R}$ drei rationale Strukturen induziert von der Liealgebrakohomologie, den kompakten symmetrischen Räumen und von $K_*(R)$ selbst. Erkläre diese Strukturen und vergleiche die ersten beiden [2].

(13) Zetawerte: Diskutiere das Hauptergebnis und dessen Beweis von [2] über den Vergleich der rationalen Strukturen auf $\det(K_p(R) \otimes \mathbb{R})$ und speziellen Zetawerten.

Literatur

[1] Borel, A., *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 7, (1974), 235–272.

[2] Borel, A., *Cohomologie de* SL_n *et valeurs de fonctions zeta aux points entiers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 4(4), (1977), 613–636.

[3] Borel, A. and Serre, J.-P., *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv., 48, (1973), 436–491.

[4] Burgos G. J., *The regulators of Beilinson and Borel* American Mathematical Society, CRM Monograph Series 15, 2002.

[5] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[6] Matsushima, Y., *On Betti numbers of compact, locally sysmmetric Riemannian manifolds*, Osaka Math. J., 14, (1962), 1–20.

[7] Wallach, N. R., *Real reductive groups. I*, Pure and Applied Mathematics, 132, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[8] Weibel, Ch., *K-book project*, http://www.math.rutgers.edu/∼weibel/Kbook.html

[9] Witte-Morris, D., *Introduction to arithmetic groups*, http://people.uleth.ca/∼dave.morris/books/IntroArithGroups.html